Marius PERIANU Florian DUMITREL

Matematică

clasa a IX-a

semestrul I

filiera teoretică: profil real (matematică-informatică, științe ale naturii)
filiera tehnologică: toate profilurile (tehnic, servicii, resurse naturale)
filiera vocațională: profil militar (matematică-informatică)

art educațional

CUPRINS

ALGEBRĂ **Capitolul 1. Mulțimea numerelor reale**

1.1. Numere raționale și iraționale. Reprezentări zecimale 9
1.2. Operații algebrice cu numere reale 12
1.3. Formule de calcul prescurtat. Identități (extindere) 15
Teste de evaluare 20
1.4. Ordonarea numerelor reale 22
1.5. Inegalități algebrice (extindere) 25
1.6. Operații cu intervale de numere reale 29
Teste de evaluare 32
1.7. Modulul unui număr real 33
1.8. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real 36
1.9. Aproximări ale numerelor reale 39
Teste de evaluare 42
1.10. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade 43

ALGEBRĂ **Capitolul 2. Elemente de logică matematică**

2.1. Propoziție. Predicat. Operații logice elementare 49
2.2. Raționament prin reducere la absurd 55
2.3. Inducția matematică 57
Teste de evaluare 60
2.4. Mulțimi 61
2.5. Probleme de numărare 65
Teste de evaluare 68
2.6. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade 69

ALGEBRĂ **Capitolul 3. Șiruri de numere reale**

3.1. Șiruri de numere reale. Șiruri monotone. Șiruri mărginite 75
3.2. Progresii aritmetice 78
3.3. Progresii geometrice 80
3.4. Probleme cu progresii aritmetice și geometrice 83
Teste de evaluare 87
3.5. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade 89

GEOMETRIE **Capitolul 4. Vectori în plan**

4.1. Segment orientat. Relația de echipolență. Vectori 95
4.2. Adunarea vectorilor 98

4.3. Înmulțirea vectorilor cu scalari 100
4.4. Descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari 102
4.5. Reper cartezian în plan 105
Teste de evaluare 108

GEOMETRIE **Capitolul 5. Concurență, coliniaritate, paralelism. Calcul vectorial în geometria plană**
5.1. Vectorul de poziție al unui punct. Teorema lui Thales 111
5.2. Centre de greutate. Relația lui Leibniz 115
5.3. Teorema bisectoarei. Vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi 118
5.4. Ortocentrul unui triunghi. Relația lui Sylvester 121
5.5. Teorema lui Menelau. Probleme de coliniaritate 124
5.6. Teorema lui Ceva. Probleme de concurență 127
Teste de evaluare 130
5.7. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade 132

Capitolul 6. Variante de subiecte pentru teză 137

SOLUȚII 143

Indice de autori 201

Bibliografie 202

CAPITOLUL 

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Tema 1.1. Numere raționale și iraționale. Reprezentări zecimale

Tema 1.2. Operații algebrice cu numere reale

Tema 1.3. Formule de calcul prescurtat. Identități (extindere)

Teste de evaluare

Tema 1.4. Ordonarea numerelor reale

Tema 1.5. Inegalități algebrice (extindere)

Tema 1.6. Operații cu intervale de numere reale

Teste de evaluare

Tema 1.7. Modulul unui număr real

Tema 1.8. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Tema 1.9. Aproximări ale numerelor reale

Teste de evaluare

Tema 1.10. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

Tema 1.1
Numere raționale și iraționale. Reprezentări zecimale

Notăm cu $\mathbb{N}$ mulțimea numerelor naturale și cu $\mathbb{Z}$ mulțimea numerelor întregi. Astfel, $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ și $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$.

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ $(a,c\in\mathbb{Z},\ b,d\in\mathbb{Z}^*)$ se numesc *echivalente* dacă $ad=bc$; scriem $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Mulțimea tuturor fracțiilor echivalente cu o fracție dată se numește *număr rațional*. Pentru simplificarea exprimării, vom identifica un număr rațional cu oricare dintre fracțiile echivalente care îl reprezintă. Mulțimea numerelor raționale se notează cu $\mathbb{Q}$. Așadar,

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\ \middle|\ p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0\right\}.$$

Cu ajutorul algoritmului de împărțire a două numere naturale, orice fracție ordinară $\frac{p}{q}$ ($p\geq 0,\ q>0$) se poate scrie sub formă de fracție zecimală periodică, cu perioada diferită de (9). Reciproc, orice fracție periodică, cu perioada diferită de (9), se poate scrie sub formă de fracție ordinară.

Dacă a este o *fracție periodică simplă*, adică are forma $a=a_0,(a_1a_2...a_p)$, unde $a_0\in\mathbb{N}$ și $a_1,a_2,...,a_p\in\{0,1,2,...,9\}$, atunci

$$a=a_0+\frac{\overline{a_1a_2...a_p}}{\underbrace{99...9}_{p\ ori}}.$$

În cazul când a este *fracție periodică mixtă*, adică $a=a_0,a_1a_2...a_k(a_{k+1}a_{k+2}...a_{k+p})$, avem

$$a=a_0+\frac{\overline{a_1a_2...a_{k+p}}-\overline{a_1a_2...a_k}}{\underbrace{99...9}_{p\ ori}\underbrace{00...0}_{k\ ori}}.$$

$\mathbb{Q}$ este mulțimea tuturor fracțiilor periodice (fracțiile zecimale finite sunt considerate fracții periodice cu perioada (0)).

Există fracții zecimale infinite și neperiodice, de exemplu $a=0,1010010001...$. O astfel de fracție zecimală se numește *număr irațional*.

Reunind mulțimea numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale, obținem *mulțimea numerelor reale*, pe care o notăm cu $\mathbb{R}$. Așadar, $\mathbb{R}$ este mulțimea tuturor fracțiilor zecimale, periodice sau neperiodice. Notăm $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Au loc incluziunile: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

*

1. ***a)*** Arătați că, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, fracția $\frac{2m+1}{3m+2}$ este ireductibilă.

b) Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care fracția $\frac{n+2}{3n+1}$ este reductibilă.

2. Scrieți ca fracție zecimală fiecare dintre numerele:

a) 5; ***b)*** $\frac{13}{8}$; ***c)*** $\frac{3}{4}$; ***d)*** $-\frac{3}{20}$; ***e)*** $\frac{14}{11}$;

f) $\frac{481}{125}$; ***g)*** $-\frac{2}{3}$; ***h)*** $\frac{31}{13}$; ***i)*** $\frac{77}{75}$; ***j)*** $-\frac{47}{66}$.

3. Transformați în fracții ordinare următoarele fracții zecimale:

a) $5,(7)$; ***b)*** $-1,(13)$; ***c)*** $0,23(7)$; ***d)*** $-1,01(02)$; ***e)*** $-3,2(123)$.

4. Fie $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Este posibil ca a^2 și a^3 să fie numere raționale?

5. ***a)*** Aflați a $100-a$ zecimală a numărului rațional $\frac{1}{13}$.

b) Arătați că există un multiplu de 13 format numai cu cifra 1.

6. Fie $a \in \mathbb{Q}$ și $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m,n)=1$. Arătați că, dacă $ma \in \mathbb{Z}$ și $na \in \mathbb{Z}$, atunci $a \in \mathbb{Z}$.

7. Arătați că, dacă o singură cifră din reprezentarea zecimală a unui număr real se repetă de o infinitate de ori, atunci numărul este rațional.

8. Arătați că un număr rațional pozitiv $\frac{p}{q}$ $\left(p, q \in \mathbb{N}^*, (p,q)=1\right)$ se reprezintă ca fracție zecimală finită dacă și numai dacă $q = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

**

9. Se consideră numărul $a = 0,101001000100001\ldots$.

a) Arătați că a este număr irațional.

b) Aflați a 1000-a zecimală a numărului a.

c) Calculați suma primelor 1000 de zecimale ale numărului a.

10. ***a)*** Fie $x, y \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Arătați că $x + y \cdot a = 0$ dacă și numai dacă $x = y = 0$.

b) Fie $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Arătați că $x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{5} = 0$ dacă și numai dacă $x = y = z = 0$.

11. Demonstrați afirmațiile:

a) dacă $r \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $r + a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

b) dacă $r \in \mathbb{Q}^*$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $ra \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

c) dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $\frac{1}{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

d) dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a > 0$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

12. Fie $n \in \mathbb{N}$. Arătați că:

a) $\sqrt{n} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = k^2,\ k \in \mathbb{N}$; ***b)*** $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

13. Arătați că există o infinitate de perechi (a,b) de numere iraționale cu $a+b \in \mathbb{Q}$ și $a \cdot b \in \mathbb{Q}$.

14. Arătați că numărul $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ este irațional.

15. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, următoarele numere sunt iraționale:

a) $\sqrt{5^n+2}$; ***b)*** $\sqrt{7n+3}$; ***c)*** $\sqrt{n^2+5n+7}$; ***d)*** $\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

16. Determinați numerele naturale k pentru care numărul $\sqrt{k^2+3k+14}$ este rațional.

17. Fie mulțimea $M = \left\{ a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Q},\ a^2-3b^2=1 \right\}$. Arătați că:

a) $2+\sqrt{3} \in M$;

b) $x,y \in M \Rightarrow xy \in M$;

c) M este infinită.

18. ***a)*** Fie $m,n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $\sqrt{m}+\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $\sqrt{m},\ \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

b) Determinați perechile (x,y) de numere naturale astfel încât $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10\sqrt{3}$.

19. Fie $a,b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a+b \in \mathbb{Q}$ și $m,n \in \mathbb{N},\ m \neq n$. Arătați că numerele $a-b$ și $ma+nb$ sunt iraționale.

***

20. Determinați $x,y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0,58(3)$.

21. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ este irațional.

22. Determinați numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{n+1}+\sqrt{4n+21}$ este rațional.

Tema 1.2
Operații algebrice cu numere reale

Calculul cu numere reale se bazează pe proprietățile adunării și înmulțirii numerelor reale.

Adunarea este operația prin care oricărei perechi de numere reale (x, y) i se asociază un număr real, notat cu $x + y$, numit *suma* numerelor x și y.

Proprietățile adunării

1. Adunarea este *asociativă*: $(a+b)+c = a+(b+c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. Adunarea este *comutativă*: $a+b = b+a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Numărul real 0 este *element neutru* pentru adunare, adică oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, avem $a+0 = 0+a = a$.

4. Orice număr real a are un *opus*, adică există un număr real notat cu $-a$, astfel încât $a+(-a) = (-a)+a = 0$.

Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, se notează $x - y = x + (-y)$ *diferența* numerelor x și y.

Înmulțirea este operația prin care oricărei perechi de numere reale (x, y) i se asociază un număr real, notat cu $x \cdot y$ sau xy, numit *produsul* numerelor x și y.

Proprietățile înmulțirii

1. Înmulțirea este *asociativă*: $(ab)c = a(bc)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. Înmulțirea este *comutativă*: $ab = ba$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Numărul real 1 este *element neutru* pentru înmulțire, adică oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, avem $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

4. Orice număr real $a \neq 0$ are un *invers*, adică există un număr real, notat cu a^{-1}, astfel încât $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

5. Înmulțirea este *distributivă față de adunare*, adică oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$, au loc egalitățile:

$$a(b+c) = ab + ac, \qquad (a+b)c = ac + bc.$$

Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $y \neq 0$, se notează $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ (*câtul* numerelor reale x și y).

---

*

1. Calculați $(-1)^n \cdot 0,1(3) + (-1)^{n+1} \cdot 0,1 + (-1)^{n+2} \cdot \frac{7}{6} + (-1)^{n+3} \cdot \frac{1}{5}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculați: ***a)*** $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{\sqrt{3}}$; ***b)*** $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

3. ***a)*** Dacă $\frac{3}{13} = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, calculați $a_{2000} - a_{1000}$ și $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$.

b) Dacă $\frac{41}{333} = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, calculați $a_5 + a_{10} + a_{15} + \ldots + a_{100}$.

4. ***a)*** Calculați suma dintre opusul și inversul numărului $\sqrt{5}-2$.

b) Calculați suma inverselor următoarelor numere: $-1,\ 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$.

5. Determinați $x \in \mathbb{R}$ în fiecare dintre cazurile:

a) opusul numărului $2x-3$ este 15;

b) inversul numărului $3x-2$ este 5;

c) numărul x^2-x este inversabil.

6. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor:

a) $3-2\sqrt{2}$ și $3+2\sqrt{2}$; ***b)*** $\sqrt{10}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$ și $\sqrt{10}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

7. Se dau numerele: $a=2\sqrt{2}-3\sqrt{3}$, $b=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$, $c=5(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. Calculați:

a) $a+b+c$; ***b)*** $a^2+b^2+c^2$; ***c)*** $ab+bc+ca$.

**

8. Calculați:

a) $2,(3)+7,(6)$; ***b)*** $0,(3)+0,0(3)+0,00(3)$;

c) $1,1(3)-2,07(27)$; ***d)*** $\frac{3}{5}-0,1(3)+\frac{1}{7}-0,(285714)$.

9. Calculați:

a) $5\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)-7\left(1-\frac{5}{6}+\frac{11}{12}\right)$; ***b)*** $\frac{(1,5-0,25+5,8(3)):2,5}{0,(6)\cdot 3,(3)-0,25\cdot 2,1(6)}-\frac{1}{11}\cdot\left(1-1:\frac{3}{2}\right)$;

c) $1-\left\{\left[\frac{1}{12}-\frac{1}{16}-7:(-24)\right]:\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\right\}\cdot\left(-5\frac{1}{3}\right)$.

10. Determinați numerele reale x din egalitatea: $\frac{1}{2}\cdot\left\{3-\frac{1}{2}\cdot\left[3-\frac{1}{2}\cdot\left(x^2-1\right)\right]\right\}=1$.

11. Calculați cu două zecimale exacte:

a) $\sqrt{3}$; ***b)*** $\sqrt{2,013}$; ***c)*** $\sqrt{5,71}$; ***d)*** $\frac{\sqrt{5}}{4}$; ***e)*** $\frac{\sqrt{39}}{3}$.

12. Calculați: $\dfrac{2,8+5\frac{1}{2}:\left(3+0,2\cdot 2\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{7}\cdot\sqrt{\frac{63}{175}}}{\left(5\frac{3}{7}\cdot 4\frac{1}{5}+2,45:4\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}-\sqrt{1,5625}}:2\frac{4}{5}$.

13. Se consideră numerele reale a, b, x, y astfel încât $a-b=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ și $x+y=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$.

Calculați $ax-by+ay-bx$.

14. Calculați:

a) $\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-5\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{18}-\sqrt{12}-\sqrt{5}\right)$;

b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3}}}$.

15. Arătați că:

a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}=2\sqrt{2}$; ***b)*** $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}=4$.

16. Calculați:

a) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\sqrt{5}\right)^{-1}+\left(\sqrt{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\right)^{-2}\cdot\left(3,5+0,(6)\right)$;

c) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$.

17. Arătați că $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}\in\mathbb{N}$.

***

18. Câturile obținute prin împărțirea numerelor $\frac{24}{11}$, $\frac{34}{13}$, $\frac{48}{7}$ la un număr rațional $r>0$ sunt numere întregi. Aflați cel mai mare număr rațional r cu această proprietate.

19. Fie $a,b\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Calculați $\frac{a^2-ab+2b^2}{a^2+ab+3b^2}$.

20. ***a)*** Arătați că $\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$.

b) Calculați suma

$$S_n=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

c) Determinați $m\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $S_m=0,75$.

Tema 1.3
Formule de calcul prescurtat. Identități (extindere)

În contextul operațiilor cu numere reale sunt foarte utile *formulele de calcul prescurtat.*

1. Factorul comun: $ab+ac=a(b+c)$.

2. Binomul la pătrat: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

3. Diferența de pătrate: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

4. Trinomul la pătrat: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.

5. Binomul la cub: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$,

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$.

6. Suma de cuburi: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

7. Diferența de cuburi: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Formulele 3, 6 și 7 admit următoarele generalizări:

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$;

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1})$, unde $n\in\mathbb{N}$ este impar.

Descompunerea trinomului de gradul al II-lea în factori de gradul I

Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, astfel încât $b^2-4ac\geq 0$. Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2+bx+c=0$, atunci $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Exemple

1. Ecuația $x^2-3x+2=0$ are soluțiile $x_1=1$, $x_2=2$, deci $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

2. Ecuația $4x^2-4x+1=0$ are soluțiile $x_1=x_2=\frac{1}{2}$, deci

$$4x^2-4x+1=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=4\cdot\frac{2x-1}{2}\cdot\frac{2x-1}{2}=(2x-1)^2.$$

Descompunerea în factori a unei expresii polinomiale de grad cel puțin egal cu 3

Propoziție. Se consideră expresia

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, unde $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$, $a_n\neq 0$.

a) Dacă $f(c)=0$, $c\in\mathbb{R}$, atunci există $b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x)=(x-c)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0).$$

b) Dacă $f(c)=0$ și, în plus, $c,a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}$, atunci $c\mid a_0$.

Demonstrație

a) Avem: $f(x)=f(x)-f(c)=a_1(x-c)+a_2\left(x^2-c^2\right)+\ldots+a_n\left(x^n-c^n\right)$.

Concluzia se obține având în vedere că

$$x^k-c^k=(x-c)\left(x^{k-1}+cx^{k-2}+c^2x^{k-3}+\ldots+c^{k-1}\right).$$

b) Din $f(c)=0$ rezultă $a_0=-c\left(a_1+a_2c+\ldots+a_nc^{n-1}\right)$, de unde $c\,|\,a_0$.

Exemplu. Vom descompune în factori expresia $f(x)=2x^3-x^2-5x-2$.

Observăm că un divizor întreg al lui 2 care anulează expresia este 2. Prin urmare, $f(x)=(x-2)g(x)$. Pentru a determina $g(x)$, grupăm termenii expresiei $f(x)$ așa încât să putem da factor comun pe $x-2$:

$$f(x)=\underbrace{2x^3-4x^2}+\underbrace{3x^2-6x}+\underbrace{x-2}=$$

$$=2x^2(x-2)+3x(x-2)+x-2=(x-2)(2x^2+3x+1).$$

Deci $g(x)=2x^2+3x+1$. La fel, din faptul că $g(-1)=0$, deducem că $g(x)$ are în descompunere factorul $x+1$; avem

$$g(x)=\underbrace{2x^2+2x}+\underbrace{x+1}=2x(x+1)+x+1=(x+1)(2x+1).$$

În concluzie, $f(x)=(x-2)(x+1)(2x+1)$.

---

*

1. Arătați că, oricare ar fi numerele reale a,b,c, au loc egalitățile:

a) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
b) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
c) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
d) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

2. Numerele reale a și b îndeplinesc condițiile $a+b=6$ și $ab=1$. Calculați:

a) a^2+b^2; ***b)*** a^3+b^3; ***c)*** a^4+b^4; ***d)*** $a-b$.

3. Arătați că, oricare ar fi numerele întregi a,b,c,d, există două numere întregi x și y astfel încât $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=x^2+y^2$.

4. Fie $x,y\in\mathbb{Q}$, $x+y\neq 0$ și $z=\dfrac{xy}{x+y}$. Arătați că $x^2+y^2+z^2$ este pătratul unui număr rațional.

5. Fie $a,b\in\mathbb{R}$. Calculați:

a) a^3+b^3 știind că $a+b=10$ și $ab=1$;
b) a^2+b^2 știind că $a+b=4$ și $a^3+b^3=52$;
c) a^3-b^3 știind că $a-b=2$ și $ab=1$.

6. Fie x un număr real nenul. Calculați:

a) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ în funcție de $a=x+\dfrac{1}{x}$; ***b)*** $x^3-\dfrac{1}{x^3}$ în funcție de $b=x-\dfrac{1}{x}$.

7. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $a-b=1$ și $a^3-b^3=37$. Calculați a^2+b^2.

8. Calculați:

a) $\left(\dfrac{a-b}{a}-\dfrac{a+b}{b}+\dfrac{3a^2+b^2}{2ab}+\dfrac{b}{a}\right)\cdot\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2+(a-b)^2}$, unde $a,b\in\mathbb{R}^*$;

b) $\frac{1}{a^3}\left\{\left[a-\left(\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}\right)\left(a-\frac{2a-1}{a+1}\right)\right]\cdot\left(a^2+a+1\right)+1\right\}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$;

c) $\frac{a^3-b^3}{a^3+a^2b+ab^2}:\left[\left(a+b-\frac{ab}{a+b}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}+\frac{ab}{a^2-b^2}\right)\right]$, unde $a,b\in\mathbb{R}^*$, $a\neq\pm b$.

9. Descompuneți în factori de forma $ax+b$:

a) x^2-x-2; ***b)*** $2x^2+5x+3$; ***c)*** $x^3-6x^2+11x-6$;

d) $2x^3+x^2-5x+2$; ***e)*** $x^4-3x^3+x^2+3x-2$; ***f)*** $x^4+x^3-3x^2-4x-4$.

10. ***a)*** Descompuneți în factori expresiile

$$A(x)=x^3-4x^2+x+6 \text{ și } B(x)=x^3-2x^2-3x.$$

b) Determinați numerele reale x pentru care fracția $F(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$ are valoarea definită.

c) Determinați numerele întregi k pentru care $F(k)\in\mathbb{Z}$.

**

11. Se consideră expresia $E(x)=x^4-x^3-6x^2+4x+8$.

a) Calculați $E(-2)$ și $E(2)$.

b) Simplificați fracția $F(x)=\frac{x^4-x^3-6x^2+4x+8}{x^4-16}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.

12. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x^2+2}{x^3-1}+\frac{x}{x^2+x+1}-\frac{1}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}\right)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

a) Arătați că $E(x)=\frac{1}{x+1}$.

b) Calculați $E(1)\cdot E\left(\frac{1}{2}\right)\cdot E\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot E\left(\frac{1}{n}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

13. Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$ astfel încât $x+y+z=1$ și $(x+y)(y+z)(z+x)=14$. Calculați

$$xy+yz+zx-xyz.$$

14. Fie $x,y\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $x^2-5xy+6y^2=0$. Determinați $\frac{x}{y}$.

15. Fie $x,y,z\in\mathbb{Q}$ astfel încât $xy+yz+zx=1$. Arătați că $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ este pătratul unui număr rațional.

16. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ cu $a+b+c=0$. Arătați că

$$\frac{1}{-a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a^2-b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0.$$

17. Arătați că, oricare ar fi numerele reale $a,b,c,$ au loc egalitățile:

a) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$;

b) $(a+b+c)^3-\left(a^3+b^3+c^3\right)=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

18. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right)$.

b) Dacă, în plus, n este impar, arătați că

$$x^n + y^n = (x+y)\left(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1}\right).$$

c) Folosind ***a)***, demonstrați că $(a+b)^n = a^n + Mb = Ma + b^n$ pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$.

d) Arătați că, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$, numărul $2^{3m+1} + 3 \cdot 5^{2m+1}$ este divizibil cu 17.

19. Numărul real $a > 0$ îndeplinește condiția $a^2 + \frac{1}{a^2} = 14$. Calculați $a^5 + \frac{1}{a^5}$.

20. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $abc = 1$. Arătați că $\frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca} = 1$.

21. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demonstrați egalitățile, descompunând membrul stâng în produs:

a) $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$;

b) $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc = (a+b)(b+c)(c+a)$;

c) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)$;

d) $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$;

e) $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

22. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Arătați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea:

$$(x-a)^2(b-c) + (x-b)^2(c-a) + (x-c)^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a).$$

23. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a \neq b \neq c \neq d$. Demonstrați egalitățile:

a) $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$;

b) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1$;

c) $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a+b+c$;

d) $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-c)(b-a)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}$.

24. Numerele reale a, b, c îndeplinesc condițiile

$$(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0 \quad \text{și} \quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1.$$

Demonstrați egalitățile:

a) $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$; ***b)*** $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} + a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

25. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq b \neq c \neq a$, astfel încât $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$. Arătați că

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$